Rešen tretji izpit teorije Analize 1 — IŠRM 2023/24

5. september 2024

Povzetek

Izpit je potekal v petek, 30. avgusta 2024 od desete[1] do dvanajste ure. Nosilec predmeta je Oliver Dragičević. Naloge in rešitve sem po spominu spisal Anton Luka Šijanec.

1. [15]
   Podaj natančne definicije naslednjih pojmov:
   (a) limita zaporedja, stekališče zaporedja
   Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realno zaporedje in $L \in \mathbb{R}$.
      i. L je limita $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim L = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$.
      ii. L je stekališče $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists \mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}, |\mathcal{A}| = |\mathbb{N}| \ni: \{a_n; n \in \mathcal{A}\} \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
   (b) vsota (neskončne) konvergentne vrste
   Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno zaporedje. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$. Če limita obstaja, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna in njena vsota je enaka tej limiti.
   (c) Cauchyjev pogoj za zaporedja
   Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realno zaporedje. Konvergentno je natanko tedaj, ko ustreza Cauchyjevemu pogoju: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.
   (d) odprte, zaprte, omejene, kompaktne množice v $\mathbb{R}$
      i. Množica $\mathcal{A}$ je odprta, ko $\forall a \in \mathcal{A} \exists \varepsilon > 0 \ni: (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq \mathcal{A}$, ko za vsako točko množice obstaja neka njena okolica, ki je podmnožica množice $\mathcal{A}$.
      ii. Množica $\mathcal{A}$ je zaprta, ko je $\mathcal{A}^{\mathcal{C}} := \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ odprta.
      iii. Množica $\mathcal{A}$ je omejena, ko $\exists m, M \in \mathbb{R} \forall a \in \mathcal{A} : a \leq M \wedge a \geq m$.
      iv. Množica $\mathcal{A}$ je kompaktna $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ zaprta $\wedge\ \mathcal{A}$ omejena.

[1] Avtor tega besedila je na izpit zamudil poldrugo uro.

(e) limita funkcije v dani točki

Naj bodo $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ okolica a in $f : \mathcal{D} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ poljubne. $L \in \mathbb{R}$ je limita f v točki $a \sim L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D} \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

(f) zveznost funkcije

Naj bodo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}$ in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ poljubne. f je zvezna v $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f je zvezna na množici $\mathcal{A}$, če je zvezna na vsaki točki množice $\mathcal{A}$.

(g) odvedljivost funkcije

Naj bodo $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ poljubne. f je odvedljiva v $a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$, ZDB ko obstaja slednja limita. Tedaj definiramo "odvod funkcije f v točki a": $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. f je odvedljiva na množici $\mathcal{A}$, če je odvedljiva na vsaki točki množice $\mathcal{A}$.

(h) določen integral realne funkcije na zaprtem omejenem intervalu.

i. Naj bodo $a, b \in \mathbb{R}$ in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ poljubne.

ii. Definirajmo pojem delitve $[a, b]$. Delitev so točke $t_0, \dots, t_n$, da velja $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Točke identificiramo z delilnimi intervali takole: $D_n = [t_{n-1}, t_n]$. Delitev torej identificiramo z množico teh dedlilnih intervalov: $D = \{D_k; \forall k \in \{1..n\}\}$. Definiramo tudi velikost delitve: $|D_\infty| = \max_{k \in \{1..n\}} |D_k|$.

iii. Definirajmo pojem izbire za dano delitev. Naj bo D delitev. Pripadajoča izbira so take izbirne točke $\xi_1, \dots, \xi_n$, da velja $\forall k \in \{1..n\} : \xi_k \in D_k$. Množico teh izbirnih točk označimo z $\xi := \{\xi_k; \forall k \in \{1..n\}\}$.

iv. f je integrabilna na $[a, b]$, če $\exists I \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ delitev $D \forall$ izbiro ξ, pripadajočo delitvi $D : |D_\infty| < \delta \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} |D_k| f(\xi) - I| < \varepsilon$. Tedaj pravimo, da je I določen integral f na $[a, b]$ in pišemo $I =: \int_a^b f(x)\, dx$.

2. [15]

(a) Pojasni princip matematične indukcije.

Naj bo $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje logičnih vrednosti/izjav/izrazov. Če velja

i. P_1 drži in hkrati

ii. $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ drži $\Rightarrow P_{n+1}$ drži,

potem velja $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$ drži.

(b) Z matematično indukcijo dokaži

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i. Baza $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ Velja.

ii. Indukcijska predpostavka: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

iii. Korak $n \to n+1$:

$$1+2+\cdots+n+\cancel{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \cancel{n+1}$$

$$1+2+\cdots+n \stackrel{\text{I.P.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$

iv. Sklep: $\forall n \in \mathbb{N}: 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

3. [25]
Naj bosta $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realni konvergentni zaporedji. Dokaži, da je $c_n \coloneqq a_n b_n$ prav tako konvergentno zaporedje.

- Označimo $\lim_{n\to\infty} a_n =: A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n =: B$.
- Uganemo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$. To moramo sedaj dokazati.
- Dokazujemo, da $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n b_n - AB| < \varepsilon \sim |a_n b_n + a_n B - a_n B - AB| = |a_n (b_n - B) + B(a_n - A)| < \varepsilon$
- Ker po trikotniški neenakosti velja $|a_n (b_n - B) + B(a_n - A)| \leq |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A|$, je dovolj za poljuben $\varepsilon > 0$ dokazati

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A| < \varepsilon$$

- Ker je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$, kjer je a zgornja meja zaporedja a_n. Slednje je omejeno, ker je konvergentno.
- Ker je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno, $\exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$.
- Tedaj za $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ velja

$$|a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A| < \frac{\varepsilon |a|}{2|a_n|} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  in izrek je dokazan.

4. [?]
Dokaži, da je zvezna realna funkcija na zaprtem intervalu omejena. Natančno navedi vse izreke, ki jih pri tem dokazu uporabiš.

Naj bodo $a, b \in \mathbb{R}$ in zvezna $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ poljubne.

- Dokaz, da je f omejena navzgor.
  - PDDRAA f ni navzgor omejena. Tedaj $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a,b] \ni: f(x_n) \geq n$.
  - Ker je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na zaprti množici, je omejeno zaporedje, torej ima stekališče. Recimo mu $s \in \mathbb{R}$.
  - Ker je $[a,b]$ zaprta, je $s \in [a,b]$.

- Ker je f zvezna na $[a, b]$ in s tem v s, velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$.
- Po konstrukciji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, torej $f(s) = \infty$, kar ni mogoče, saj $f(s) \in \mathbb{R}$ po predpostavki. $\rightarrow\!\leftarrow$.

Predpostavka "f ni navzgor omejena" ne velja, torej smo dokazali, da je f navzgor omejena.

- Dokaz, da je f omejena navzdol.
  - PDDRAA f ni navzdol omejena. Tedaj $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] \ni: f(x_n) \leq -n$.
  - Ker je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na zaprti množici, je omejeno zaporedje, torej ima stekališče. Recimo mu $s \in \mathbb{R}$.
  - Ker je $[a, b]$ zaprta, je $s \in [a, b]$.
  - Ker je f zvezna na $[a, b]$ in s tem v s, velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$.
  - Po konstrukciji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$, torej $f(s) = -\infty$, kar ni mogoče, saj $f(s) \in \mathbb{R}$ po predpostavki. $\rightarrow\!\leftarrow$.

  Predpostavka "f ni navzdol omejena" ne velja, torej smo dokazali, da je f navzdol omejena.
- Ker je f omejena navzgor in navzdol, je omejena.
- Uporabljeni izreki.
  - Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s členi na kompaktni množici je omejeno.
  - Omejeno zaporedje ima stekališče.
  - Če je $s \in \mathbb{R}$ stekališče zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obstaja konvergentno podzaporedje $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da je s njegova limita.
  - Množica je kompaktna natanko tedaj, ko vsebuje limite vseh konvergentnih zaporedij s členi v njej.
  - Funkcija f je zvezna v s, če za vsako k s konvergentno zaporedje velja, da njegovi s f preslikani členi konvergirajo v $f(s)$.

5. [?]
   Za realno funkcijo ene spremenljivke dokaži verižno pravilo.

   - Naj bodo $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}$ in $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ poljubne. Naj bo f odvedljiva v x in g odvedljiva v $f(x)$.
   - Dokažimo, da je $g \circ f$ odvedljiva v x in da velja
     $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$
   - Označimo $a \coloneqq f(x)$ in $\delta_h \coloneqq f(x+h) - f(x)$. Potemtakem $f(x+h) = \delta_h + a$.
     $$(g \circ f)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(\delta_h + a) - g(a)}{h} =$$
     $$= \lim_{h\to 0} \frac{g(\delta_h + a) - g(a)}{\delta_h} \cdot \frac{\delta_h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(\delta_h + a) - g(a)}{\delta_h} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots$$
     Ker je f v x odvedljiva, je v x zvezna, zato sledi $h \to 0 \Rightarrow \delta_h \to 0$.
     $$\cdots = g'(a) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$